

Rapport final

Nom	Alexandre Mauroy
Sélection	2013
Institution d'accueil	Université de Liège
Promoteur	Rodolphe Sepulchre
Période couverte par ce rapport	du 15/12/2013 au 15/12/2014
Titre	An operator-theoretic framework for studying the collective behaviors of interacting agents. Application to the analysis of rhythms in neural networks.

1. Objectifs

L'étude des systèmes dynamiques complexes, c'est-à-dire de systèmes évoluant dans le temps, de grande dimension et non linéaires, requière le développement d'outils adaptés. Ainsi, il apparaît que par exemple, des outils et techniques mathématiques sont manquants pour l'analyse et l'identification des réseaux dynamiques tels que des ensembles de neurones biologiques. Par ailleurs, en théorie du contrôle (ou automatique), établir les propriétés de systèmes non linéaires, même de petite dimension, est un problème crucial mais compliqué, pour lequel peu de méthodes systématiques existent.

Dans le cadre de la théorie mathématique des systèmes dynamiques et de la théorie du contrôle, l'objectif de ce projet a été de combler les manques décrits ci-dessus et de développer une nouvelle approche basée sur la théorie des opérateurs (et de l' « opérateur de Koopman » en particulier) pour l'étude de systèmes complexes. Les résultats théoriques obtenus ont été exploités afin de dériver des méthodes spectrales pour l'analyse de comportements collectifs dans des grands réseaux.

Une partie du projet s'est concentrée sur le problème d'identification des réseaux, c'est-à-dire un problème inverse pour lequel la structure du réseau (par exemple un réseau neuronal) est déterminée à partir de la dynamique collective observée (par exemple des données d'imagerie par résonance magnétique fonctionnelle fMRI). Contrairement aux méthodes actuellement proposées, les méthodes développées dans ce projet permettent des mesures locales sur un nombre restreint d'agents du réseau (petit nombre de neurones).

Le projet a notamment contribué à introduire en théorie du contrôle une approche spectrale basée sur l'opérateur de Koopman et qui est encore peu connue dans cette communauté. Les résultats obtenus ont montré que l'approche a en effet des implications théoriques importantes et des connections avec des concepts issus de la théorie du contrôle, tels que la stabilité, la monotonie ou encore la positivité différentielle. Pendant le mandat, l'approche a été popularisée au travers de publications et sessions invitées en conférences, et reçoit actuellement un intérêt grandissant.

2. Résultats

2.1. Identification et analyse spectrale des réseaux

Ce travail a été réalisé dans le cadre de ma visite à l'UCL et en collaboration avec J. Hendrickx.

Les méthodes proposées actuellement en identification des réseaux requièrent des mesures à tous les nœuds, ce qui n'est pas adapté à des applications biologiques. Dans le cadre de ce projet, une nouvelle méthode appelée « identification spectrale » a été développée, dont l'objectif est d'identifier les propriétés (spectrales) de la matrice Laplacienne décrivant le réseau. La méthode ne permet pas de

reconstituer exactement l'entière du réseau, un objectif d'ailleurs généralement trop ambitieux en biologie, mais elle permet néanmoins d'en obtenir des informations globales à partir de quelques mesures locales. Par ailleurs, les mesures peuvent correspondre à l'addition de l'activité de plusieurs agents du réseau (par exemple l'activité électrique d'un groupe de neurones). La méthode proposée est également non invasive (elle n'impose pas de modifications du réseau) et peut fonctionner « offline » sur des données préalablement enregistrées au cours d'expérimentations. Elle est donc parfaitement adaptée à l'identification de réseaux biologiques.

Ma recherche s'est concentrée sur des réseaux d'agents qui convergent vers un état d'équilibre (tels que ceux observés avec des neurones excitables, des cellules cardiaques, des dynamiques d'épidémie ou encore des dynamiques d'opinion dans des réseaux sociaux). Les résultats ont permis d'identifier la relation entre le spectre de la matrice Laplacienne du réseau et le spectre de l'opérateur de Koopman. Alors que le premier détermine les propriétés recherchées du réseau, le second peut être directement obtenu à partir de données grâce à la méthode de « décomposition en modes dynamiques ». Ces résultats permettent donc de résoudre le problème d'identification spectrale des réseaux. Dans le cas d'agents non identiques, nous avons démontré que le problème est insoluble. Cependant, des résultats obtenus ont prouvé que, pour de grands réseaux, on peut obtenir les moments spectraux de la matrice Laplacienne si l'on connaît la distribution statistique de la population d'agents non identiques. Ces résultats ont par exemple permis d'obtenir avec une bonne précision le nombre moyen connections dans le réseau cérébral d'E. Coli, à partir d'une seule mesure et en supposant que chaque neurone est décrit par la dynamique bidimensionnelle de FitzHugh-Nagumo. Ils ont également servi à estimer les nombres maximal et minimal de connections dans un réseau non dirigé, et détecter l'addition d'une arête et d'un nœud au réseau. Finalement, la méthode permet également d'observer si deux agents « ressentent » le même spectre, et s'influencent donc l'un l'autre dans une même composante connexe du réseau. Tous ces résultats ont été soumis comme publication dans un journal [1].

Etant donné qu'il est possible de reconstruire le spectre de l'opérateur de Koopman à partir de données, les résultats obtenus sont amenés à être exploités dans le cas d'applications concrètes (par ex. imagerie médicale, réseaux de régulation génétique, etc.). Des résultats préliminaires ont été obtenus sur des données d'imagerie fMRI et pourraient permettre à terme d'identifier les propriétés spectrales associées à des patients dans différents états de conscience. Ces travaux sont amenés à être poursuivis dans la suite de mes recherches.

2.2. Approche spectrale en théorie du contrôle

L'approche spectrale proposée a été introduite en théorie du contrôle et a permis de développer des méthodes numériques systématiques pour traiter des propriétés importantes des systèmes.

Stabilité globale

Des résultats préliminaires obtenus pendant mon séjour postdoctoral à UCSB avaient démontré l'interaction existant entre les propriétés de stabilité d'un système non linéaire et l'existence de fonctions propres particulières de l'opérateur de Koopman. Durant la première année de mandat, de nouvelles méthodes numériques ont été développées pour le calcul de fonctions propres non analytiques, ce qui élargit l'application de l'analyse de stabilité (notamment pour le cas de cycle limites). Ces méthodes reposent sur la réalisation de l'opérateur dans une base de polynômes de Bernstein et permettent d'étudier la stabilité globale d'un système non linéaire de manière systématique. D'un point de vue plus général, cette approche issue de la théorie des opérateurs étend les méthodes spectrales linéaires aux systèmes non linéaires, ce qui offre un angle d'attaque tout à fait nouveau sur la théorie de la stabilité. Ces travaux ont été acceptés pour publication [6].

Positivité différentielle

En collaboration avec R. Sepulchre et F. Forni (Université de Cambridge), nous avons mis en lumière la relation directe entre les propriétés spectrales de l'opérateur de Koopman et la propriété géométrique de positivité différentielle du système (c'est-à-dire le fait que la linéarisation du système contracte un champ de cônes). Ces observations ont notamment permis d'obtenir des résultats inverses pour l'existence de la positivité différentielle. Par exemple, nous avons montré qu'un système possédant un nœud ou un cycle limite hyperbolique stable est toujours différentiellement positif dans le bassin d'attraction correspondant. Dans ce cas, le champ de cônes contractants peut être construit directement à partir de fonctions propres de l'opérateur de Koopman. Cette approche permet ainsi d'obtenir une méthode numérique pour calculer le champ de cônes contractants et les courbes de Perron-Frobenius associées (correspondant à des lignes de niveau zéro de fonctions propres) [9]. Par la suite, nous avons prouvé que tout système admettant un attracteur unidimensionnel et normalement hyperbolique est toujours différentiellement positif [3].

Monotonicité

En collaboration avec A. Sootla (postdoc à l'ULg), les propriétés de l'opérateur de Koopman ont été investiguées lorsque le système est monotone (c'est-à-dire que toute paire de trajectoires ordonnée reste ordonnée). Dans ce cas, l'opérateur de Koopman est en effet positif (c'est-à-dire invariant) dans le cône de fonctions croissantes. Par ailleurs, nous avons montré que les propriétés spectrales dominantes du système permettent de caractériser une propriété de monotonicité asymptotique. Cette propriété n'existait auparavant que pour les systèmes linéaires (propriété de Perron-Frobenius) et une caractérisation spectrale directe n'était pas possible pour les systèmes non linéaires. Grâce à notre approche spectrale obtenue via l'opérateur de Koopman, nous avons ainsi pu généraliser le concept aux systèmes non linéaires. Les résultats ont été appliqués à divers modèles biologiques (système toxine-anti toxine, diabète, répressilateur génétique) et ont démontré que ces modèles ne sont pas monotones mais bien asymptotiquement monotones. Ces résultats ont été soumis dans [4] et ont également motivé une nouvelle méthode efficace, basée sur la propriété de monotonicité, pour le calcul de bassins d'attractions de systèmes bistables [8].

Contrôle optimal and contrôle par impulsion

Le concept d'isostables introduit dans mes travaux précédents et lié aux propriétés de l'opérateur de Koopman a été exploité dans le cadre d'un problème de contrôle optimal. Plus précisément, les isostables ont été utilisées comme fonction objectif afin de résoudre le problème de convergence (ou échappement) optimal d'un équilibre stable lorsque le contrôle est de courte durée [11]. Par ailleurs, ce concept a été par la suite exploité dans le cadre de ma collaboration avec A. Sootla et adapté à l'étude des systèmes bistables. L'objectif du problème, qui a des implications directes en biologie synthétique, est de caractériser l'ensemble des contrôles par impulsion qui permettent au système de passer d'un état stable à un autre (par exemple d'un état où un gène est actif à un état où il est inactif). Nous avons ainsi pu définir la nouvelle notion de « switching isostable », qui correspond à l'ensemble des paramètres définissant les contrôles par impulsion permettant de converger vers le nouvel état de manière synchronisée [7].

2.3. Autres

Modes normaux non linéaires

Dans le cadre d'une collaboration avec le doctorant I. Cirillo (co-supervisé par R. Sepulchre et G. Kerschen), des connections ont été établies entre mes travaux et des méthodes populaires en théorie

des vibrations mécaniques. En particulier, nous avons considéré les « modes normaux non linéaires », qui correspondent à des modes de vibration simples s'apparentant au mouvement d'un oscillateur amorti classique. Aussi, nous avons montré que les modes normaux non linéaires ne sont rien d'autre que des lignes de niveau de fonctions propres de l'opérateur de Koopman. Ce résultat apporte une définition rigoureuse et originale des modes normaux non linéaires et permet par ailleurs d'obtenir une nouvelle méthode de calcul. Cette dernière est basée sur une expansion en séries de Taylor et définit de nouvelles coordonnées permettant de paramétrer le mode de manière globale (alors que les méthodes existantes dépendent de « coordonnées maîtres » qui ne sont pas toujours valables globalement). Ainsi la nouvelle méthode proposée permet de calculer les modes loin du point d'équilibre, par exemple là où la présence d'un pli empêche l'utilisation de méthodes classiques. Ces résultats ont fait l'objet d'une publication dans une conférence [10] et ont été soumis sous forme d'article de journal [5].

Problème des quatre barres

Avec R. Jungers (UCL), j'ai proposé une solution partielle pour un problème proposé par S. Langerman et P. Taslakian (ULB) et issu de la géométrie computationnelle. Le problème consiste à montrer que, pour un système de quatre barres attachées par leurs extrémités, il est possible d'obtenir toutes les configurations possibles par réflexion successive de deux arrêtes. Le problème a été reformulé dans le contexte de la théorie des systèmes dynamiques et a été résolu en utilisant des résultats d'ergodicité sur le cercle [2].

3. Perspectives

L'approche spectrale proposée et développée dans le cadre du mandat est encore relativement nouvelle et ouvre de nombreuses perspectives, tant pour les contributions fondamentales théoriques qu'au niveau des applications pratiques.

Identification et analyse des réseaux : vers l'analyse de données réelles

Au cours du mandat, les résultats théoriques obtenus ont démontré qu'il est possible d'identifier des propriétés globales d'un réseau à partir de mesures locales. Ceux-ci sont cependant limités aux réseaux qui se synchronisent via un couplage diffusif linéaire. Aussi, cette direction de recherche est amenée à être poursuivie, afin d'identifier les limitations de l'approche spectrale pour des réseaux dynamiques de complexité croissante (oscillateurs de Kuramoto non identiques, oscillateurs couplés impulsivement).

Au-delà des résultats théoriques, la méthode n'a pas été utilisée de manière extensive sur des données réelles, mis à part quelques essais préliminaires sur des données fMRI. Dans ce contexte, je compte orienter mes prochaines investigations dans cette direction. La méthode d'identification spectrale peut être appliquée à des données biologiques pour identifier les propriétés spectrales d'un réseau cérébral (à partir de données d'imagerie médicales ou EEG) ou d'un réseau génétique (à partir de données d'expression de gènes). Dans ce cas, il ne serait pas possible de retrouver la topologie complète d'un réseau (qui n'est d'ailleurs pas toujours nécessaire) mais on pourrait par contre calculer des marqueurs spectraux permettant d'identifier une pathologie ou comparer différents réseaux. D'autres applications potentielles pourraient également être envisagées dans les réseaux électriques (détection de lignes coupées) et les réseaux sociaux (détection de communautés). Il est bon de remarquer que la méthode spectrale proposée pourrait être couplée à des outils issus de l'intelligence artificielle et de l'optimisation afin d'effectuer un « post-processing » du spectre obtenu.

Une nouvelle approche en théorie du contrôle

Le projet de recherche développé au cours du mandat a contribué à populariser l'approche spectrale (utilisant l'opérateur de Koopman) et a en particulier attiré un intérêt grandissant dans la communauté de théorie du contrôle. Plusieurs sessions invitées ont d'ailleurs été organisées dans les conférences principales du domaine (IEEE CDC, ECC, SIAM) au cours de la deuxième année de mandat. L'introduction de l'opérateur de Koopman en théorie du contrôle s'est déjà avérée très fructueuse, mais des questions importantes n'ont pas encore été considérées ou restent irrésolues à ce jour. Par exemple, la définition d'un opérateur de Koopman pour des systèmes non autonomes (par exemple commandés) n'est pas évidente mais constituerait une avancée considérable, puisqu'elle permettrait de développer une approche spectrale rigoureuse pour les systèmes entrée-sortie non linéaires. A long terme, l'approche pourrait être adaptée à la commande et au design de systèmes de grande échelle, tels que les infrastructures routières, les épidémies ou encore les réseaux sociaux. Par ailleurs, il serait intéressant de traiter le problème de stabilité des systèmes à retard et des systèmes commutés non linéaires au travers de l'approche spectrale développée dans ce projet. Ces directions de recherche seront également envisagées dans mes futurs travaux de recherche.

Perspectives d'intégration à long-terme et de carrière

La suite de ma carrière s'appuiera sur les perspectives mentionnées ci-dessus, en poursuivant principalement dans une direction théorique, mais aussi en favorisant plus fortement les applications. Recherchant prioritairement un poste permanent (chargé de cours, chercheur permanent) dans une institution belge, je souhaiterais promouvoir et valoriser les méthodes originales et théoriques développées dans ce projet à un niveau local, au travers de collaborations visant notamment des applications dans le domaine de la biologie et la médecine. Au niveau international, l'approche proposée est actuellement développée par un groupe croissant de scientifiques, et j'en suis le principal promoteur en Belgique.

4. Valorisation/Diffusion (Publications, Conférences, Séminaires, Missions à l'étranger)

Dans l'institution d'accueil, ce mandat a permis de nombreuses interactions non seulement au sein du département d'Electricité, mais également à l'échelle de la faculté de Sciences Appliquées. Par exemple, au travers d'une interaction avec G. Kerschen (Département de Mécanique à l'ULg), mes recherches passées ont permis de définir un sujet initial pour la thèse de I. Cirillo. Au sein du département, j'ai par ailleurs présenté mes recherches dans le cadre d'une journée organisée par l'unité de recherche et lors d'un séminaire interne. J'ai également assuré la suppléance d'un cours du programme Master proposé par le département aux étudiants ingénieurs civils.

Au niveau national, j'ai activement participé aux journées d'étude PAI-DYSCO, avec notamment la présentation d'un poster. Mes travaux ont également été présentés lors de séminaires à l'UCL et à l'UNamur. Enfin, des interactions et collaborations ont été initiées avec l'UCL dans le cadre de ma visite dans le groupe ICTEAM, qui a pu bénéficier de mon expertise en théorie des systèmes non linéaires.

Les travaux menés dans le cadre du mandat ont été soumis dans 11 publications internationales avec comité de relecture (6 dans des journaux et 5 à des conférences). J'ai également présentés mes résultats lors d'autres conférences et visites à l'étranger.

Articles dans des journaux

- [1] **A. Mauroy** et J. Hendrickx, *Spectral identification of networks using sparse measurements*, soumis à SIAM Journal on Applied Dynamical Systems, <http://arxiv.org/abs/1601.04364>

- [2] **A. Mauroy**, P. Taslakian, S. Langerman et R. Jungers, *The four bars problem: a dynamical systems perspective*, soumis à Nonlinearity, <http://arxiv.org/abs/1512.09177>
- [3] F. Forni, **A. Mauroy** et R. Sepulchre, *Differential positivity characterizes one-dimensional normally hyperbolic attractors*, à re-soumettre, <http://arxiv.org/abs/1511.06996>
- [4] A. Sootla et **A. Mauroy**, *Operator-theoretic characterization of eventually monotone systems*, submitted to Automatica, conditionnellement accepté dans Automatica, <http://arxiv.org/abs/1510.01149>
- [5] G. I. Cirillo, **A. Mauroy**, L. Renson, G. Kerschen et R. Sepulchre, *A spectral characterization of nonlinear normal modes*, conditionnellement accepté dans Journal of Sound and Vibration, <http://arxiv.org/abs/1507.03753>
- [6] **A. Mauroy** et I. Mezic, *Global stability analysis using the eigenfunctions of the Koopman operator*, IEEE Transactions on Automatic Control (full paper), en presse

Articles de conférence (avec comité de relecture)

- [7] A. Sootla et **A. Mauroy**, *Shaping pulses to control bistable systems using Koopman operator*, soumis à IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems (session invitée), 2016
- [8] A. Sootla et **A. Mauroy**, *Estimation of isostables and basins of attraction of monotone systems*, soumis à American Control Conference, 2016
- [9] **A. Mauroy**, F. Forni et R. Sepulchre, *An operator-theoretic approach to differential positivity*, 54ème IEEE Conference on Decision and Control (session invitée), Osaka (Japon), 2015
- [10] G. I. Cirillo, **A. Mauroy**, L. Renson, G. Kerschen et R. Sepulchre, *Global parametrization of the invariant manifold defining nonlinear normal modes using the Koopman operator*, ASME 2015 International Design Engineering Technical Conferences, Boston (USA), 2015
- [11] **A. Mauroy**, *Converging to and escaping from the global equilibrium: Isostables and optimal control*, 53ème IEEE Conference on Decision and Control, Los Angeles (USA), 2014

Autres présentations à des conférences, workshops et séminaires invités

- 02/2016 *Analysis of dissipative systems using Koopman operator*, MFO Mini-symposium on Applied Koopmanism (invité), Oberwolfach (Allemagne)
- 12/2015 *Isochrons and isostables of dynamical systems: application to neuroscience*, séminaire à l'université de Kyoto (invité par Y. Susuki), Kyoto (Japon)
- 12/2015 *A linear approach to nonlinear systems: spectral-based methods for stability analysis and network identification*, séminaire à l'Université de Namur (invité par R. Lambiotte), Namur (Belgique)
- 11/2015 *A spectral approach to nonlinear systems: From stability analysis to network identification*, séminaire à l'Université du Luxembourg (invité par J. Goncalves), Belvaux (Luxembourg)
- 07/2015 *Global stability analysis for nonlinear systems using the eigenfunctions of the Koopman operator / Neuroscience applications: isochrons and isostables*, 14th European Control Conference (workshop spécial), Linz (Autriche)
- 07/2015 *Application of the Koopman Operator to differential positivity*, SIAM Conference on Control and Its Applications (session invitée), Paris (France)

- 05/2015 *Computation of the Koopman eigenfunctions is a systematic method for global stability analysis*, SIAM Conference on Applications of Dynamical Systems (session invitée), Salt Lake City (USA)
- 05/2015 *A (linear) spectral analysis of (nonlinear) biological systems: From phase reduction to network identification*, séminaire à l'Université de Liège, Liège (Belgique)
- 04/2014 *Spectral operator-theoretic approach to dissipative systems: toward a systematic linear analysis of nonlinear systems?*, séminaire à l'Université catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve (Belgique)

Missions à l'étranger durant le mandat

- 12/2015 *Conférence IEEE CDC à Osaka* (1 semaine) : une présentation orale ; *visite à l'université de Kyoto* (1 jour) : une présentation orale lors d'un séminaire et interactions avec Y. Susuki et F. Raak sur les dynamiques dans les réseaux électriques et les méthodes numériques de décomposition spectrale
- 07/2015 *Workshop spécial et conférence ECC à Linz* (1 semaine) : deux présentations orales
- 07/2015 *Conférence SIAM à Paris* (1 semaine) : présentation orale
- 05/2015 *Visite à l'Université de Californie Santa Barbara* (3 jours) : collaboration avec I. Mezic sur les propriétés spectrales de l'opérateur de Koopman pour des systèmes quasi-périodiques et chaotiques (article en préparation) ; *conférence SIAM à Snowbird, Utah* (1 semaine) : présentation orale
- 11/2014 *Visite à l'Université de Cambridge* (3 jours) : collaboration avec F. Forni et R. Sepulchre sur la positivité différentielle. Un article de conférence et un article journal ont été rédigés sur base de cette interaction.
- 10/2014 *Visite à l'Université TU Dresde* (1 semaine) : collaboration avec S. Siegmund sur l'application de l'opérateur de Koopman pour des automates finis en réseau. Une ébauche d'article a été rédigée mais une publication finale est toujours en cours d'élaboration.
- 05/2014 *Visite à l'Université de Cambridge* (1 semaine) : collaboration avec F. Forni et R. Sepulchre sur la positivité différentielle, ainsi qu'avec M. Claeys sur le calcul de fonctions propres par optimisation.